



## فصل ۴

### کاربرد مشتق

#### بخش ۱.۴ دیفرانسیل تابع

**۱.۴ تعریف.** برای مشتق تابع  $y = f(x)$  می‌توانیم از نماد  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$  استفاده کنیم که در آن  $dx$  و  $dy$  نمادهای مستقل می‌باشند. دیفرانسیل تابع  $f$  را با عبارت  $dy = f'(x)dx$  نمایش می‌دهند.

**۲.۴ مثال.** دیفرانسیل توابع زیر را بدست آورید؟

الف)  $y = x^3 + 2x^2 - 4$

$$dy = (3x^2 + 4x)dx$$

ب)  $y = \ln(x^2 + 1)$

$$dy = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)dx$$

ج)  $y = \sin t + t^2$

$$dy = (\cos t + 2t)dt$$

## بخش ۲.۴ معادله‌ی خط مماس بر منحنی

در تابع  $y = f(x)$  برای پیدا کردن معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی  $x_0$  ابتدا شیب<sup>۱</sup> این خط را که برابر با  $m = f'(x_0)$  است را بدست آورده و با استفاده‌ی از رابطه‌ی

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (۱.۴)$$

(معادله‌ی خط) که در آن  $y_0 = f(x_0)$  می‌باشد به معادله‌ی خط مماس بر منحنی می‌رسیم.

**۳.۴ مثال.** معادله‌ی خط مماس بر منحنی  $y = x^2$  را در نقطه‌ی  $x_0 = -1$  بیابید؟

$$y' = 2x \quad \rightarrow \quad y'(-1) = 2(-1) = -2 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

$$y(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$x_0 = -1 \quad \rightarrow \quad y_0 = 1$$

حال با استفاده از رابطه‌ی ۱.۴ داریم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - 1 = -2(x - (-1)) \quad \rightarrow \quad y = -2x - 1$$

**۴.۴ مثال.** معادله‌ی خط مماس بر منحنی  $y = \sqrt{x}$  را در نقطه‌ی بطول  $x_0 = 4$  بیابید؟

$$y = x^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{4}$$

از طرفی عرض نمودار در نقطه‌ی  $x_0 = 4$  برابر است با:

$$y_0 = y(4) = \sqrt{4} = 2$$

پس نقطه‌ی موردنظر در دستگاه مختصات  $(4, 2)$  می‌باشد:

$$(x_0, y_0) = (4, 2)$$

حال به کمک رابطه‌ی ۱.۴ معادله‌ی خط مماس را می‌یابیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x + 1$$

---

<sup>۱</sup> به شیب خط مماس بر منحنی، ضریب زاویه خط مماس بر منحنی نیز گفته می‌شود.

## بخش ۳.۴ معادله‌ی خط قائم بر منحنی

برای بدست آوردن معادله‌ی خط قائم بر منحنی  $y = f(x)$  در نقطه‌ی  $x_0$  باید شیب خط قائم را از رابطه‌ی

$$m' = -\frac{1}{m} \quad (۲.۴)$$

بدست آوریم<sup>۲</sup> و سپس با در نظر گرفتن نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  معادله‌ی خط قائم به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m'(x - x_0) \\ &= -\frac{1}{m}(x - x_0) \end{aligned} \quad (۳.۴)$$

**۵.۴ مثال.** معادله‌ی خط قائم بر منحنی  $y = x^3$  را در نقطه‌ی  $x_0$  بدست آورید؟ ابتدا مختصات نقطه‌ی مورد نظر در دستگاه مختصات را می‌یابیم:

$$y(1) = (1)^3 = 1 \longrightarrow (x_0, y_0) = (1, 1)$$

اکنون بکمک رابطه‌ی ۲.۴ به محاسبه‌ی شیب خط قائم می‌پردازیم:

$$y' = 3x^2 \longrightarrow m = y'(1) = 3(1)^2 = 3 \longrightarrow m' = -\frac{1}{3}$$

و در ادامه با استفاده از رابطه‌ی ۳.۴ به معادله‌ی خط قائم خواهیم رسید:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \longrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

**۶.۴ مثال.** معادله خط مماس و قائم بر منحنی  $y = x^4 - 3x^2 - 16$  را در نقطه‌ی به طول  $x_0 = 1$  بیابید؟ ابتدا می‌بایستی مختصات نقطه‌ی مورد نظر را در دستگاه مختصات بیابیم:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 16 \longrightarrow f(1) = (1)^4 - 3(1) - 16 = 1 - 19 = -18$$

بنابراین  $(x_0, y_0) = (1, -18)$  می‌باشد و شیب خط مماس  $(m)$  نیز بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x \longrightarrow m = f'(1) = 4(1)^3 - 6(1) = 4 - 6 = -2$$

و شیب خط قائم نیز بکمک رابطه‌ی ۲.۴ برابر است با

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

---

<sup>۲</sup>شیب خط مماس را با  $m$  و شیب خط قائم را با  $m'$  نشان می‌دهیم.

اکنون معادله‌ی خط مماس با استفاده از رابطه‌ی ۱۰.۴ برابر است با:

$$y - (-18) = -2(x - 1) \rightarrow y = -2x - 16$$

و معادله‌ی خط قائم نیز با استفاده از رابطه‌ی ۳۰.۴ برابر است با:

$$y - (-18) = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{37}{2}$$

#### بخش ۴.۴ نقاط اکسترم

۷.۴ تعریف (ماکزیمم). به نقطه‌ای که در آن مقدار عرض تابع بیشتر از نقاط دیگر است ماکزیمم گفته می‌شود.

۸.۴ تعریف (مینیمم). به نقطه‌ای که در آن مقدار عرض تابع کمتر از نقاط دیگر است مینیمم گفته می‌شود.

۹.۴ تعریف. به نقطه‌ای که مشتق در آن برابر با صفر باشد یا مشتق در آن نقطه وجود نداشته باشد، یک نقطه‌ی بحرانی گفته می‌شود.

۱۰.۴ تذکر. برای یافتن نقاط اکسترم بایستی نقاط بحرانی تابع را بیابیم.

۱۱.۴ مثال. نقاط اکسترم تابع  $f(x) = x^2$  را بازه‌ی  $[-1, 2]$  بیابید و مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق آن را مشخص کنید؟

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

۱۲.۴ نکته. نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز جزء نقاط اکسترم تابع می‌باشند.

$$\{-1, 0, 2\} = \text{نقاط اکسترم}$$

حال مقادیر تابع  $f$  را در نقاط اکسترم محاسبه می‌کنیم.

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 4$$

پس  $Max = 4$  و  $Min = 0$  است.

## بخش ۵.۴ جهت تقعر تابع

جهت تقعر تابع با استفاده از علامت مشتق دوم مشخص می‌گردد:  
 الف) اگر  $f'' > 0$  باشد، جهت تقعر تابع به سمت بالا خواهد بود.  
 ب) اگر  $f'' < 0$  باشد، جهت تقعر تابع به سمت پایین خواهد بود.

۱۳.۴ تعریف (نقطه عطف). نقطه‌ی  $C$  برای تابع  $f(x)$  را یک نقطه‌ی عطف می‌نامیم هرگاه  $f'(c)$  موجود باشد و مشتق دوم در نقطه‌ی  $C$  تغییر علامت بدهد.

۱۴.۴ تذکر. در واقع در نقطه‌ی عطف جهت تقعر تابع تغییر می‌کند.

۱۵.۴ نکته. اگر  $f(x)$  تابعی پیوسته بر بازه‌ی  $[a, b]$  و بر  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه:

۱) اگر  $f'(x) \geq 0$  باشد، تابع صعودی است.

۲) اگر  $f'(x) \leq 0$  باشد، تابع نزولی است.

۳) اگر  $f'(x) > 0$  باشد، تابع اکیداً صعودی است.

۴) اگر  $f'(x) < 0$  باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۱۶.۴ مثال. صعودی و نزولی بودن تابع  $f(x) = x^2$  را در بازه‌ی  $[-2, 2]$  بررسی کنید؟

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$$

حال می‌بایستی  $f'$  را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x) = 0 \longrightarrow 2x = 0 \longrightarrow x = 0$$

$x$	$x < 0$	0	$x > 0$
$f' = 2x$	-	0	+

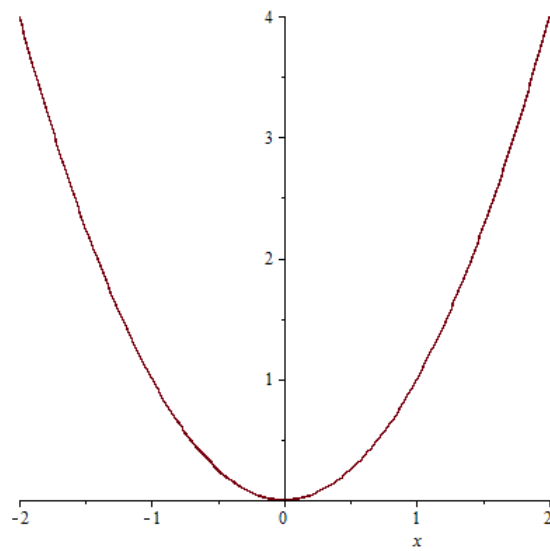
بنابراین تابع در بازه‌ی  $[-2, 0]$  نزولی و در بازه‌ی  $[0, 2]$  صعودی می‌باشد.

۱۷.۴ مثال. صعودی یا نزولی بودن تابع  $f(x) = x - \cos x$  را روی بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  بررسی کنید؟

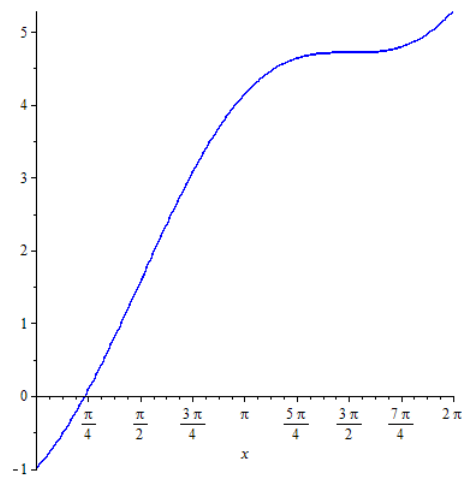
$$f(x) = x - \cos x \longrightarrow f'(x) = 1 + \sin x$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2$$

بنابراین همواره  $0 \leq f'$  است، و در نتیجه تابع  $f(x)$  همواره صعودی می‌باشد.



شکل ۱۰۴: در این شکل صعودی و نزولی بودن تابع  $f(x) = x^2$  نمایش داده می‌شود.



شکل ۲۰۴: نمودار تابع  $f(x) = x - \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$ .

## بخش ۴.۶ قاعده‌ی هوییتال

هدف از ارایه این بخش کمک به حل برخی از حالت‌های حد است که بصورت  $\frac{0}{0}$  یا  $\frac{\infty}{\infty}$  می‌باشد.

۱۸.۴ قضیه. اگر حد  $\frac{f(x)}{g(x)}$  در  $x_0$  بصورت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases} \quad \text{یا}$$

و دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  هر دو در همسایگی  $x_0$  مشتق پذیر باشند، در این صورت :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

خواهد بود.

۱۹.۴ مثال. حدهای زیر را محاسبه کنید؟

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} =_{Hop} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{1} = \frac{3(-1)^2}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =_{Hop1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} =_{Hop2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{5x - 1} \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{5x - 1} =_{Hop} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(-x)}{\tan x} \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(-x)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cot(-x)}}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot(-x)} = \frac{0}{0}$$



$$Hop = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(1 + \cot^2 x)}{1 + \cot^2(-x)} = \frac{-(1+0)}{1+0} = \frac{-1}{1} = -1$$

۲۰.۴ نکته. توابع مثلثاتی که حد آن‌ها بصورت  $\frac{\infty}{\infty}$  باشد را بایستی به حالت  $\frac{0}{0}$  تبدیل نمود.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{1 + \sin 2\pi x}{(2x + \frac{1}{2})^2} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{1 + \sin 2\pi x}{(2x + \frac{1}{2})^2} =_{Hop1} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{2\pi \cos(2\pi x)}{4(2x + \frac{1}{2})} =_{Hop2} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{-(2\pi)^2 \sin(2\pi x)}{8}$$

$$= \frac{-4\pi^2 \sin(-\frac{\pi}{2})}{8} = \frac{\pi^2}{2}$$

۱.۶.۴ حالت  $0 \times \infty$

اگر در جریان محاسبه حد توابع به حالت  $0 \times \infty$  برخورد کنیم، می‌توانیم با تبدیل این حالت به  $\frac{0}{0}$  از قاعده‌ی هوییتال برای محاسبه‌ی حد کمک بگیریم. در ادامه با ذکر چند مثال روش تبدیل حالت  $0 \times \infty$  به  $\frac{0}{0}$  را نشان خواهیم داد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x = 0 \times \infty$$

اکنون حد فوق را به  $\frac{0}{0}$  تبدیل خواهیم کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = \frac{0}{0}$$

$$Hop = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \tan^2 x} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

۲۱.۴ مثال. حد زیر را محاسبه کنید؟

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) \tan \frac{\pi x}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \tan \frac{\pi x}{4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\frac{1}{\tan \frac{\pi x}{4}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\cot \frac{\pi x}{4}} = \frac{0}{0}$$

$$Hop = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{-\frac{\pi}{4}(1 + \cot^2 \frac{\pi x}{4})} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

بخش ۷.۴ قضایای مقدار میانگین و رول

**۲۲.۴ قضیه مقدار میانگین.** فرض کنید تابع  $f(x)$  در بازه  $[a, b]$  پیوسته و در بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد، آن گاه حداقل یک نقطه  $c$  که  $a < c < b$  می باشد وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (۴.۴)$$

**۲۳.۴ مثال.** با توجه به قضیه مقدار میانگین مقدار  $c$  را برای تابع  $f(x) = x^2 + 3x$  در بازه  $[-2, 1]$  بیابید؟

$$f'(x) = 2x + 3 \quad \longrightarrow \quad f'(c) = 2c + 3$$

$$a = -2 \quad \longrightarrow \quad f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) = 4 - 6 = -2 \quad \longrightarrow \quad f(a) = -2$$

$$b = 1 \quad \longrightarrow \quad f(1) = (1)^2 + 3(1) = 1 + 3 = 4 \quad \longrightarrow \quad f(b) = 4$$

حال با توجه به رابطه ی ۴.۴ داریم

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{4 - (-2)}{1 - (-2)} = \frac{6}{3} = 2$$

پس

$$2c + 3 = 2 \quad \longrightarrow \quad 2c = -1 \quad \longrightarrow \quad c = -\frac{1}{2}$$

**۲۴.۴ قضیه رول.** اگر  $f(x)$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته و بر  $(a, b)$  مشتق پذیر و  $f(a) = f(b)$  باشد، در این صورت نقطه  $c$  که  $a < c < b$  می باشد، وجود دارد بطوری که :

$$f'(c) = 0$$

۲۵.۴ مثال. عدد  $c$  مورد نظر در قضیه رول برای تابع  $f(x) = x^2 + 5x - 6$  را در بازه  $[-3, 1]$  بیابید؟

$$f'(x) = 2x + 5$$

$$f'(c) = 0 \longrightarrow 2c + 5 = 0 \longrightarrow c = -\frac{5}{2}$$

۲۶.۴ نتیجه قضیه رول. اگر  $f(x)$  تابعی مشتق پذیر باشد، بین هر دو ریشه  $f(x) = 0$  حداقل یک نقطه اکسترمم وجود دارد که  $f'(x) = 0$  است.

#### بخش ۸.۴ معادله خط

۲۷.۴ تعریف. معادله خط گذرنده از نقطه  $P_0 = (x_0, y_0)$  با شیب  $m$  از رابطه

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

بدست می آید.

۲۸.۴ تذکر. گاهی اوقات در محاسبه معادله خط شیب  $m$  را به ما نمی دهند و در نتیجه می بایستی مختصات دو نقطه  $(x_1, y_1) = p_1$  و  $(x_2, y_2) = p_2$  را در نظر گرفته و سپس با استفاده از

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شیب  $m$  را مشخص کنیم.

۲۹.۴ مثال. معادله خط گذرنده از نقطه  $p = (2, 3)$  که دارای شیب  $m = 2$  است را مشخص کنید؟

$$m = 2, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 3$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \longrightarrow y - 3 = 2(x - 2)$$

$$y - 3 = 2x - 4 \longrightarrow y = 2x - 1$$

۳۰.۴ مثال. معادله خط گذرنده از نقاط  $(2, -1)$  و  $(1, 3)$  را بدست آورید؟

ابتدا با توجه به مختصات دو نقطه می بایستی شیب خط مورد نظر را تعیین کنیم

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 3$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{1 - 2} = \frac{4}{-1} = -4$$

اکنون یکی از دو نقطه  $(p = (1, 3))$  را انتخاب کرده و با توجه به مقدار  $m = -4$  معادله خط را بدست می آوریم

$$y - 3 = -4(x - 1) \longrightarrow y - 3 = -4x + 4 \longrightarrow y = -4x + 7$$

## بخش ۹.۴ کاربرد مشتق در بهینه‌سازی

یکی از کاربردهای محاسبه‌ی اکسترمم مطلق بحث بهینه‌سازی است. در اینجا تابعی که باید بهینه شود را بر حسب یک متغیر می‌نویسیم و با توجه به دامنه‌ی تغییرات مقادیر اکسترمم مطلق آن را محاسبه می‌کنیم.

**مثال ۳۱.۴.** اگر در یک نانوائی قیمت هر عدد نان برابر با  $x$  تومان بوده و تعداد تقاضا در هر روز برابر با  $200 - 4x$  عدد باشد، آن‌گاه بیشترین درآمد به ازای چه قیمتی برای هر عدد نان بدست خواهد آمد؟

**حل:**

در اینجا تابع درآمد را با  $f(x)$  نمایش می‌دهیم

$$f(x) = x(200 - 4x)$$

$$f(x) = -4x^2 + 200x$$

$$f'(x) = -8x + 200 \rightarrow f' = 0 \rightarrow -8x + 200 = 0$$

$$8x = 200 \rightarrow x = 25$$

$$f''(x) = -8 < 0$$

$$f(25) = -4(25)^2 + 200(25) = -2500 + 5000 = 2500$$

بنابراین  $x = 25$  یک نقطه‌ی ماکزیمم برای تابع  $f(x)$  خواهد بود و بهترین قیمت برای هر عدد نان در این نانوائی 25 تومان است.

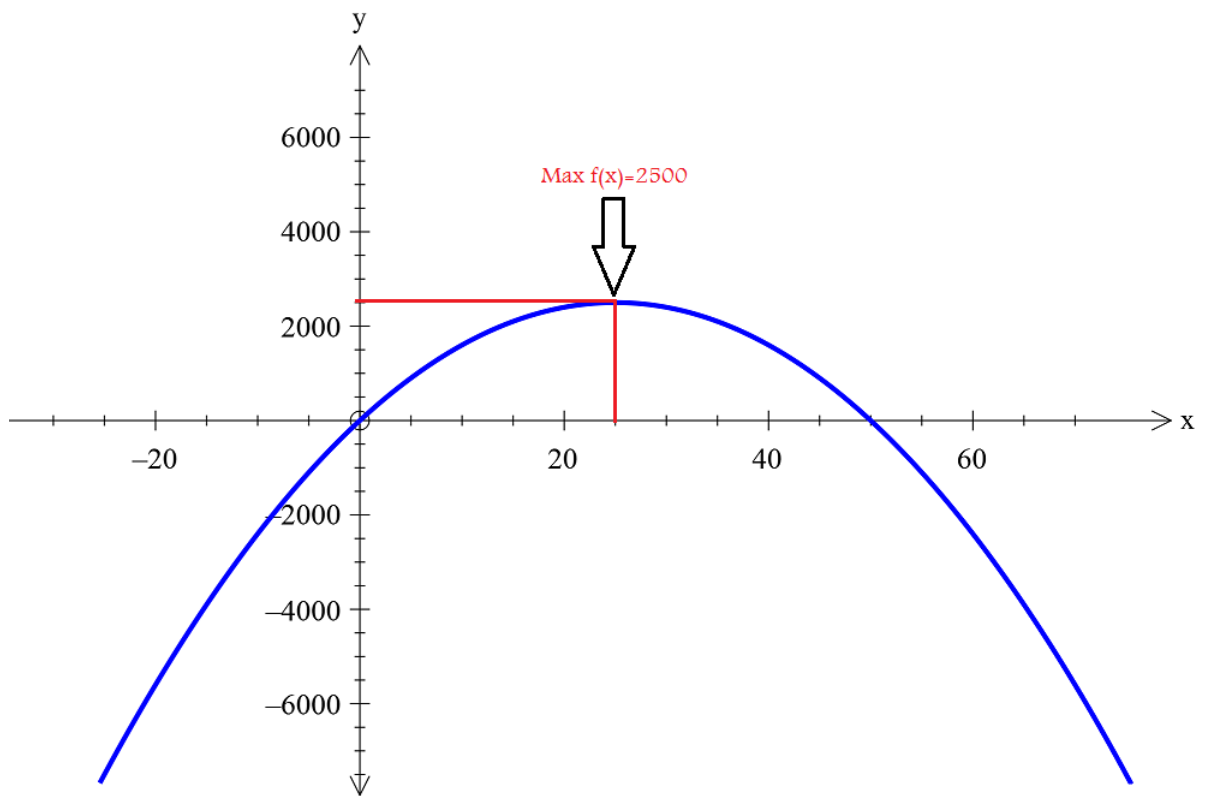
**مثال ۳۲.۴.** یک کارخانه تولید برق در منطقه‌ای کوچک در حال فعالیت می‌باشد بطوری که این کارخانه در هر روز  $x$  وات برق تولید کرده و قیمت فروش هر وات برق برابر با  $300 - 2x$  یورو است؛ همچنین هزینه‌ی تولید  $x$  وات برق برابر با  $20x + 15$  یورو می‌باشد. با توجه به شرایط ذکر شده در مسئله برای کسب بیشترین سود بهتر است کارخانه در هر روز چند وات برق تولید کند؟

**حل:**

میزان درآمد حاصل از فروش هر وات برق را می‌توان برحسب  $x$  و بصورت تابع زیر بیان نمود

$$g(x) = x(300 - 2x) = -2x^2 + 300x$$

با توجه به هزینه تولید هر وات برق سود حاصل از فروش هر  $x$  وات برق بصورت زیر خواهد بود:



شکل ۳.۴: نمودار تابع درآمد  $f(x) = -4x^2 + 200x$  که مربوط به مثال اول از مبحث بهینه سازی می باشد.

$$f(x) = -2x^2 + 300x - 20x - 15 = \text{درآمد} - \text{هزینه} = f(x)$$

$$f(x) = -2x^2 + 280x - 15$$

اکنون می‌بایستی برای تابع فوق بیشترین مقدار یا همان ماکسیمم را مشخص کنیم.

$$f'(x) = -4x + 280, \quad f''(x) = -4 < 0$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x + 280 = 0$$

$$4x = 280 \rightarrow x = 70$$

بنابراین تابع  $f(x)$  به‌ازی  $x = 70$  به بیشترین مقدار خود می‌رسد که برابر با

$$f(70) = -2(70)^2 + 280(70) - 15 = 9785$$

بنابراین این کارخانه برای کسب بیشترین سود می‌بایستی  $x = 70$  وات برق در روز تولید کرده و بفروشد تا 9785 یورو در هر روز سود داشته باشد.

#### بخش ۱۰.۴ رسم نمودار

برای رسم نمودار یک تابع درجه دو یا سه می‌بایستی مشتقات اول و دوم تابع را محاسبه نموده و با پیدا کردن جواب‌هایی از  $f, f', f''$  که برابر با 0 می‌گردند جدول تعیین علامت را تشکیل داده و بکمک این جدول به صعودی یا نزولی بودن تابع و تعیین جهت تقعر تابع پرداخته شود تا در نتیجه بتوانیم به رسم نمودار تابع دست یابیم.

۳۳.۴ مثال. نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 4x + 4$  را رسم کنید؟

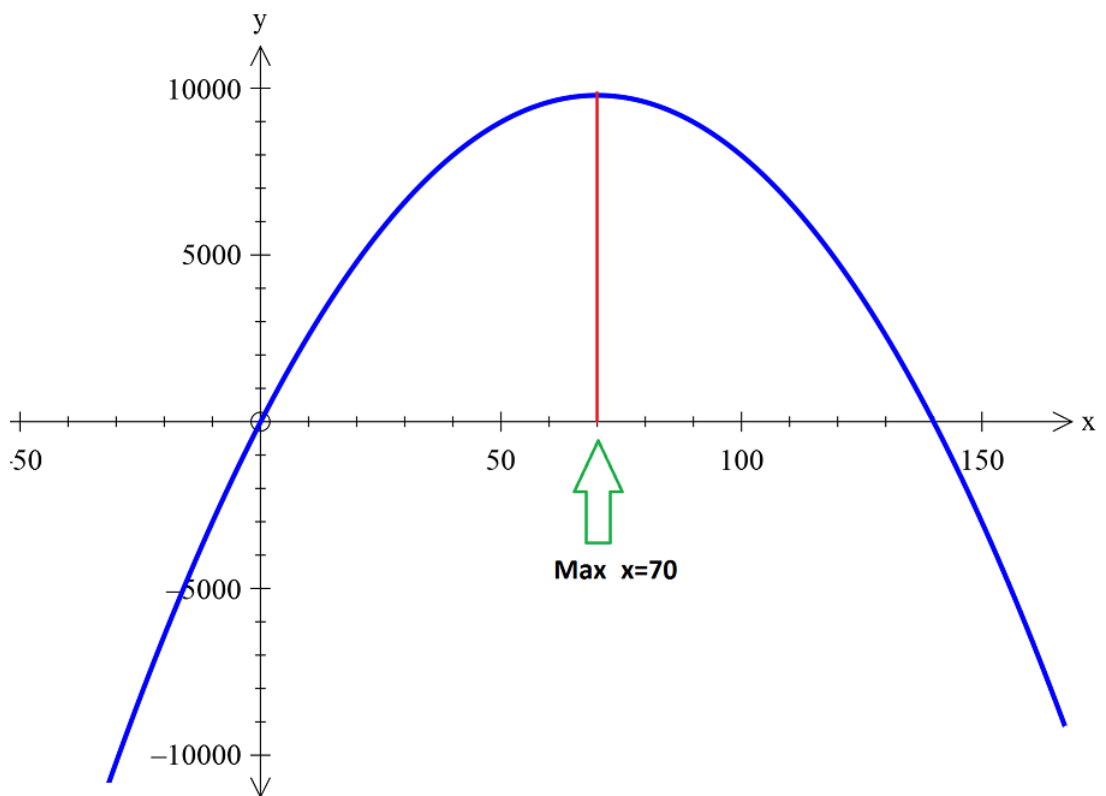
$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 \rightarrow f'(x) = 2x + 4$$

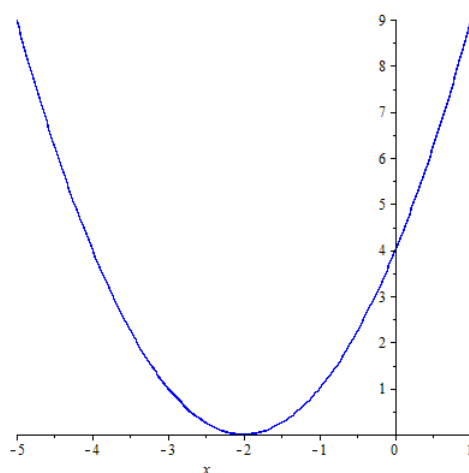
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$f'(x) = 2x + 4 \rightarrow f''(x) = 2 > 0$$

اکنون بسراغ تعیین جدول تعیین علامت برای تابع  $f$  و مشتقات آن می‌رویم



شکل ۴.۴: نمودار تابع  $f(x) = -2x^2 + 280x - 15$  که مربوط به مثال دوم از مبحث بهینه سازی می باشد.

شکل ۵.۴: نمودار تابع  $x^2 + 4x + 4$ 

$x$	$x < -2$	$-2$	$x > -2$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

و نمودار آن در دستگاه مختصات بصورت شکل زیر خواهد بود.

مثال ۳۴.۴. نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + 5x - 6$  را رسم کنید؟

$$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow x = 2, 3$$

$$f(x) = -x^2 + 5x - 6 \rightarrow f'(x) = -2x + 5$$

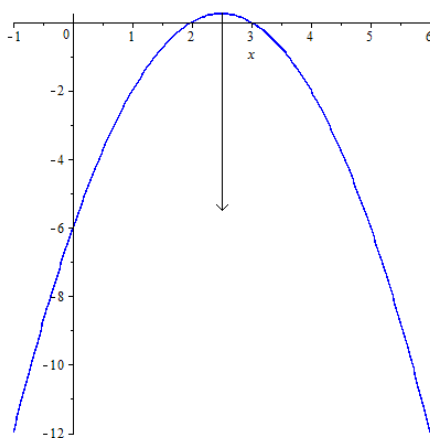
$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$f'(x) = -2x + 5 \rightarrow f''(x) = -2 < 0$$

اکنون جدول موردنظر برای رسم نمودار این تابع را تشکیل می‌دهیم

$x$		2		2.5		3	
$f'$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$
$f''$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$





شکل ۴.۶: نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + 5x - 6$  و جهت تقعر آن که به پایین است.

مثال ۳۵.۴. نمودار تابع  $f(x) = x^3$  را رسم کنید؟

$$f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 \longrightarrow f''(x) = 6x$$

$$f(x) = 0 \longrightarrow x^3 = 0 \longrightarrow x = 0$$

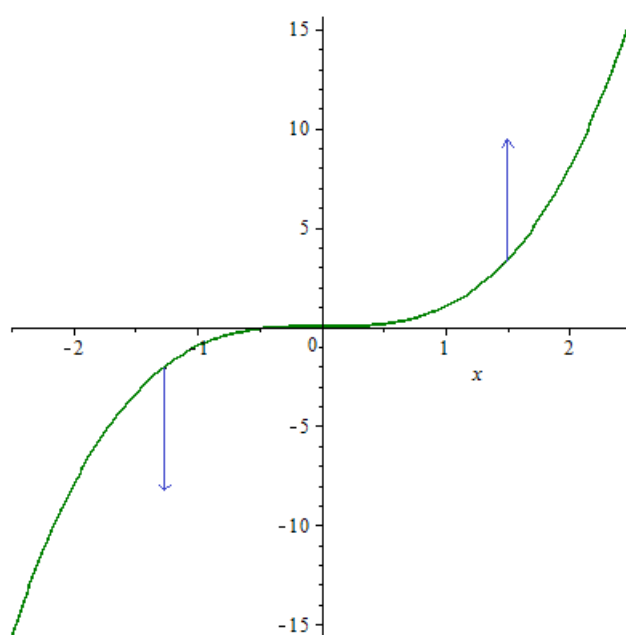
$$f'(x) = 0 \longrightarrow 3x^2 = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = 0 \longrightarrow 6x = 0 \longrightarrow x = 0$$

و در ادامه جدول موردنظر برای ترسیم تابع  $f(x) = x^3$  بصورت زیر خواهد بود:

$x$		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↗		↗

از آنجایی که نقطه‌ی 0 یک جواب  $f''(x) = 0$  است و مشتق دوم در 0 تغییر علامت می‌دهد 0 برای تابع  $y = x^3$  یک نقطه‌ی عطف می‌باشد.



شکل ۷.۴: نمودار تابع  $y = x^3$  و جهت تقعر آن که در نقطه‌ای بطول ۰ تغییر می‌کند.

مثال ۳۶.۴. نمودار تابع  $y = x^3 + 2x^2$  را رسم کنید؟

$$y = x^3 + 2x^2 \rightarrow y' = 3x^2 + 4x \rightarrow y'' = 6x + 4$$

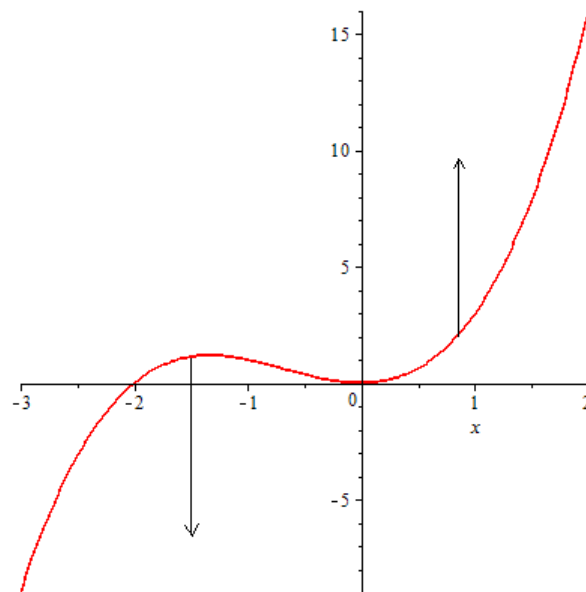
$$y = 0 \rightarrow x^3 + 2x^2 = 0 \rightarrow x^2(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2, 0$$

$$y' = 3x^2 + 4x = 0 \rightarrow \Delta = 16 \rightarrow x = \frac{-4 \pm 4}{6} = -\frac{4}{3}, 0$$

$$y'' = 0 \rightarrow 6x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

اکنون جدول مورد نظر برای ترسیم نمودار را با توجه به نقاط  $c = -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0$  در نظر می‌گیریم:

$$y(-2) = 0, \quad y(-\frac{4}{3}) = \frac{32}{27} = 1.19, \quad y(-\frac{2}{3}) = \frac{16}{27} = 0.59, \quad y(0) = 0$$



شکل ۸.۴: نمودار تابع  $y = x^3 + 2x^2$  که در آن نقطه‌ی  $\bullet$  یک نقطه‌ی عطف بوده و جهت تقعر تابع عوض می‌شود، همچنین این تابع تا نقطه‌ی  $-\frac{4}{3}$  صعودی و از  $-\frac{4}{3}$  تا  $0$  نزولی و از  $0$  به بعد صعودی می‌باشد.

$x$		$-2$		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$0$	
$y'$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$y''$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$y$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$