فصل ۷

ماتریس

بخش ۱.۷ تعریف ماتریس

۱.۷ تعریف. هر ماتریس A از m سطر و n ستون تشکیل شده است که اعضای ماتریس را درآیه نامیده و هر کدام از آنها را با a_{ij} نمایش می‌دهند که i نشان دهنده‌ی شماره‌ی سطر و j نشان دهنده‌ی شماره‌ی ستون درآیه‌ی a_{ij} در ماتریس A می‌باشد و ماتریس A را یک ماتریس $m \times n$ می‌نامند.

۲.۷ مثال.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

در اینجا A یک ماتریس از مرتبه‌ی 2×3 می‌باشد که شامل ۲ سطر و ۳ ستون است.

$$a_{12} = 1 \quad , \quad a_{23} = 5$$

۳.۷ نکته. اگر $m = n$ باشد، ماتریس A را یک ماتریس مربعی می‌نامند که در واقع در آن تعداد سطر و ستون با یکدیگر برابر است.

۴.۷ مثال.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

۵.۷ تعریف (قطر اصلی). برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

درآیه‌های a_{11} ، a_{22} و a_{33} را قطر اصلی ماتریس و همچنین درآیه های a_{31} ، a_{22} و a_{31} را قطر فرعی ماتریس A می‌نامند.

۶.۷ تذکر. دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$ را هم مرتبه گویند هرگاه تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس A و B باهم برابر باشند، یعنی $m = p$ و $n = q$ باشد.

۷.۷ تعریف. دو ماتریس را مساوی گویند هرگاه تک تک درآیه‌های آن دو با یکدیگر برابر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

۸.۷ تعریف. ماتریسی که تمام درآیه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامند.

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۹.۷ تعریف. ماتریسی که تمام درآیه‌های روی قطر اصلی آن برابر با یک و سایر درآیه‌های آن صفر باشد را ماتریس همانی گویند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۰.۷ تعریف. به ماتریسی که تمام درآیه‌های آن به جز درآیه‌های روی قطر اصلی صفر باشد، ماتریس قطری می‌گویند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بخش ۲.۷ جبر ماتریس

۱.۲.۷ جمع دو ماتریس

برای جمع دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$ ابتدا باید هم مرتبه بودن دو ماتریس را بررسی کنیم و در صورتی که ماتریس‌های A و B هم‌مرتبه باشند (یعنی $m=p$ و $n=q$) آنگاه برای بدست آوردن جمع دو ماتریس $A+B$ ، درآیه‌های نظیر را با یکدیگر جمع می‌زنیم بطور مثال برای ماتریس‌های

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

داریم

$$A+B=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

و یا اگر ماتریس‌های A و B بصورت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

باشند، آنگاه:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

۲.۲.۷ تفریق دو ماتریس

برای تفریق دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$ مشابه حالت جمع دو ماتریس ابتدا باید هم مرتبه بودن دو ماتریس را بررسی کنیم و در صورتی که ماتریس‌های A و B هم‌مرتبه باشند (یعنی $m=p$ و $n=q$) آنگاه برای بدست آوردن تفریق دو ماتریس $A-B$ ، درآیه‌های نظیر را از یکدیگر کم می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

که داریم

$$A-B=\begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

همچنین اگر ماتریس‌های A و B بصورت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

باشند، آنگاه:

$$A-B=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{bmatrix}$$

۱۱.۷ مثال. جمع و تفریق را برای دو ماتریس A و B را در صورت امکان انجام دهید؟

الف)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 4 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

۳.۲.۷ ضرب دو ماتریس

اگر دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$ را داشته باشیم تنها درصورتی قادر به انجام ضرب $A.B$ هستیم که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد، یعنی $n=p$ که ماتریس حاصلضرب $A.B$ یک ماتریس $m\times q$ خواهد بود:

$$A_{m\times n}.B_{p\times q}=(A.B)_{m\times q}$$

اگر دو ماتریس A و B بصورت

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2} \quad , \quad B_{2\times2}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}_{2\times2}$$

باشند، آنگاه ضرب $A.B$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A.B)=\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}_{2\times2}$$

و یا اگر دو ماتریس $A_{2\times3}$ و $B_{3\times2}$ بصورت

$$A_{2\times3}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times3} \quad , \quad B_{3\times2}=\begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix}_{3\times2}$$

باشند آنگاه با توجه به این که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر است ضرب دو ماتریس $(A.B)$ بصورت زیر می‌باشد:

$$A.B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times3}.\begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix} ag+bi+ck & ah+bj+cl \\ dg+ei+fk & dh+ej+fl \end{bmatrix}_{2\times2}$$

۱۲.۷ مثال. اگر دو ماتریس A و B بصورت زیر باشند، ضرب $A.B$ را درصورت امکان انجام دهید؟

$$A_{2\times2}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad , \quad B_{2\times2}=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

حل: با توجه به اینکه تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر است بنابراین ضرب $A.B$ قابل انجام می‌باشد، بطوریکه

$$(A.B)=\begin{bmatrix} 1(7)+2(1) & 1(0)+2(2) \\ 3(7)+5(1) & 3(0)+5(2) \end{bmatrix}_{2\times2}=\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 26 & 10 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

۱۳.۷ مثال. اگر دو ماتریس A و B بصورت زیر باشند، ضرب $A.B$ را درصورت امکان انجام دهید؟

$$A_{2\times3}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad , \quad B_{3\times2}=\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

حل: از آنجایی که تعداد ستون‌های ماتریس A و تعداد سطرهای ماتریس B هردو برابر با 3 هستند، بنابراین ضرب $A.B$ امکان پذیر بوده و یک ماتریس 2×2 می‌باشد:

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} . \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 3(0)+0(-4)+1(3) & 3(5)+0(1)+1(7) \\ 4(0)+1(-4)+(-2)(3) & 4(5)+1(1)+(-2)(7) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 22 \\ -10 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین ضرب $A.B$ برابر با ماتریس 2×2 زیر است:

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 22 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

بخش ۳.۷ دترمینان ماتریس

۱۴.۷ تعریف. دترمینان یک ماتریس 2×2 بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \longrightarrow \qquad \det(A) = ad - bc$$

همچنین اگر A یک ماتریس 3×3 باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

آنگاه دترمینان A به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ek-fh) - b(dk-fg) + c(dh-eg) \end{aligned}$$

۱۵.۷ تذکر. برای تعریف دترمینان یک ماتریس نخست باید به این نکته توجه داشت که دترمینان تنها برای ماتریس‌های مربعی قابل تعریف می‌باشد، یعنی ماتریس‌هایی که در آن تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر است.

۱۶.۷ مثال. دترمینان ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید؟

الف)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\det(A) = 2(5) - 4(1) = 10 - 4 = 6$$

$$\det A = 6$$

ب)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned} \det(B) &= 3\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3(5-0) - 2(0-(-12)) + 2(0-20) \\ &= 15 - 24 - 40 = -49 \end{aligned}$$

۱۷.۷ تمرین. دترمینان ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید؟

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$